RESEARCH PROBLEMS FOR THE NATIONAL SUMMER SCHOOL 2010

DAVID ZMIAIKOU

Содержание

1. Числа на круге

В данной задаче рассматривается вопрос расстановки натуральных чисел на круге таким образом, чтобы любые несколько подряд идущих чисел обладали определенным свойством.

- a1) Найдите все $n > 1$, при которых на круге можно расставить n натуральных чисел так, чтобы для любых двух подряд идущих чисел отношение наибольшего к наименьшему было простым числом.
- a2) Даны натуральные числа a, b и $k = a+b$. Найдите все $n \geq k$, при которых на круге можно расставить n натуральных чисел так, чтобы для любых k подряд идущих чисел произведение каких-то a из них равнялось простому числу, умноженному на произведение оставшихся b чисел.
- b1) Найдите все $n > 1$, при которых на круге можно расставить n натуральных чисел так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел одно являлось суммой двух других.
- b2) Даны натуральные числа a, b и $k = a + b$. Найдите все $n \geq k$, при которых на круге можно расставить n натуральных чисел так, чтобы для любых k подряд идущих чисел сумма каких-то a из них равнялась сумме оставшихся b чисел.
- c) Сформулируйте и исследуйте другие аналогичные задачи.

Date: 9 апреля 2011 г.

2. Линейные комбинации

Комбинаторная задача об остатках линейных комбинаций элементов конечного множества целых чисел.

a1) Даны девять различных целых чисел. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a, b, c и d такие, что $a+b-c-d$ делится на 20.

a2) Пусть N натуральное число. Найдите наименьшее натуральное $m=m(N)$, удовлетворяющее условию: из любого множества m целых чисел всегда можно выбрать четыре различных числа a, b, c и d такие, что выражение $a+b-c-d$ делится на N.

a3) Пусть N и k натуральные числа. Найдите наименьшее натуральное $m=m(N,k)$, удовлетворяющее условию: из любого множества m целых чисел всегда можно выбрать $2k$ различных чисел $a_1,\dots,a_k$ и $b_1,\dots,b_k$ такие, что линейная комбинация $a_1+\dots+a_k-b_1-\dots-b_k$ делится на N.

b) *Общая формулировка.* Пусть N, k и l натуральные числа. Найдите наименьшее натуральное $m=m(N,k,l)$, удовлетворяющее условию: из любого множества m целых чисел всегда можно выбрать $(k+l)$ различных чисел $a_1,\dots,a_k$ и $b_1,\dots,b_l$ таких, что линейная комбинация $a_1+\dots+a_k-b_1-\dots-b_l$ делится на N.

c) Предложите свои обобщения и направления.

3. Многоугольники Нагеля

Рассмотрим произвольный треугольник ABC, обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки касания вневписанных окружностей к треугольнику, лежащие на сторонах BC, CA и AB соответственно. С помощью теоремы Чевы несложно показать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Нагеля.* В данной задаче определяется аналогичное понятие для произвольного многоугольника.

a1) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Вневписанные окружности к четырехугольнику касаются сторон BC, CD, DA и AB в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Рассмотрим четырехугольник, вершинами которого являются точки пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Обозначим его через N_{ABCD} и назовем его *первым четырехугольником Нагеля.* Исследуйте зависимость свойств этого четырехугольник от свойств исходного четырехугольника. Например, найдите площадь N_{ABCD}, зная площадь $ABCD$, и т.п.

a2) Можно также рассмотреть четырехугольник N'_{ABCD}, вершинами которого являются точки пересечения отрезков AB_1, BC_1, CD_1 и DA_1. Назовем его *вторым четырехугольником Нагеля.* Сравните четырехугольники N_{ABCD} и N'_{ABCD}.

b) Обобщите и исследуйте задачу для выпуклого n-угольника, где $n>4$.

4. Четверки простых чисел-близнецов

Два натуральных числа p и q называются *числами-близнецами*, если они оба просты и $q=p+2$. Так, пары $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$ являются парами чисел-близнецов.

a1) Найдите все натуральные n, для которых существуют числа-близнецы p и q такие, что 2^n+p и 2^n+q также являются числами-близнецами.

a2) Дано натуральное число k. Верно ли, что существует только конечное число натуральных n, для которых найдется пара чисел-близнецов (p,q) такая, что (k^n+p,k^n+q) также пара чисел-близнецов?

b) Найдите все натуральные n, для которых существуют числа-близнецы p и q такие, что $2\cdot 5^n+p$ и $2\cdot 5^n+q$ также являются числами-близнецами.

c) *Общая формулировка.* Даны натуральное число k и многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Верно ли, что существует только конечное число натуральных n, для которых найдется пара чисел-близнецов (p, q) такая, что $(P(k^n)+p, P(k^n)+q)$ также пара чисел-близнецов? Например, в пункте b) рассматриваются значения $k = 5$ и $P(x) = 2x$.

5. Динамика точки, движущейся к вершинам многоугольника

Задача по планиметрии, в которой рассматривается несложная динамическая система.

a1) Точка P движется прямолинейно к вершине A треугольника ABC. На половине пути она сворачивает и движется к вершине B, на половине пути она сворачивает и движется к вершине C, на половине этого пути она снова сворачивает к A и т.д. Доказать, что существует треугольник, на который точка P стремится попасть. Построить этот треугольник и вычислить его площадь, если площадь треугольника ABC равна S.

a2) Пусть n натуральное число. Решите предыдущую задачу для случая, когда точка P проходит $1/n$ часть пути к вершине и затем сворачивает к другой вершине.

b) Та же задача для выпуклого четырехугольника $ABCD$. Заметьте, что здесь появляется несколько существенно отличных вариантов обхода вершин: A, B, C, D, или A, C, B, D, или A, C, D, B, ...

c) Общая задача для выпуклого многоугольника.

6. Одновременная делимость

В данной задаче речь идет о нахождении критериев, необходимых и достаточных для того, чтобы множества корней двух целочисленных уравнений (по модулю натурального числа) совпадали.

a1) Докажите, что $3x + y$ кратно 13 тогда и только тогда, когда $5x + 6y$ кратно 13, где x и y – целые числа.

a2) Дано натуральное число n. Описать множество целых чисел a, b, c и d, для которых выполняется следующее условие: числа $ax + by$ и $cx + dy$ делятся на n при одних и тех же целых значениях x и y.

a3) Даны натуральные числа n и k. Описать множество целых чисел $a_1, \dots, a_k$, и $b_1, \dots, b_k$, для которых выполняется следующее условие: числа $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$ и $b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$ делятся на n при одних и тех же целых значениях $x_1, \dots, x_k$.

b) Дано натуральное число n. Описать множество целых чисел a, b, c и d, для которых выполняется следующее условие: числа $ax^2 + by^2$ и $cx^2 + dy^2$ делятся на n при одних и тех же целых значениях x и y.

c) Исследуйте одновременную делимость других целочисленных выражений.

7. Вложение одного треугольника в другой

Обозначим через P и Q треугольники с длинами сторонами p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 соответственно. Какие условия (необходимые и/или достаточные) нужно наложить на p_i и q_i, чтобы в треугольнике P можно было поместить треугольник Q?

8. Наибольшие хорды многоугольников

Рассмотрим выпуклый n-угольник P с длинами сторон a_1, …, a_n. Обозначим через b_i длину наибольшей хорды P, параллельной i-ой стороне.

a) Докажите, что

$$\sqrt{8} < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \leqslant 4.$$

Когда выполняется равенство?

b) Верно ли, что

$$3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \ ?$$

c) Попытайтесь найти трехмерные аналоги этих неравенств.

(*Хордой* называется отрезок с концами на сторонах или в вершинах многоугольника.)

9. Рептилии

Назовем *n-рептилией* плоскую фигуру, которую можно разрезать на n одинаковых фигур, подобных исходной.

a) Опишите все n-рептилии, являющиеся выпуклыми многоугольниками.
b) Приведите примеры невыпуклых n-рептилий.
c) Приведите примеры рептилий с "дырками".
d) Существуют ли 2-рептилии, являющиеся одновременно 3-рептилиями?

10. Число поцелуев выпуклой фигуры

Числом поцелуев выпуклой фигуры P на плоскости называется наибольшее число копий фигуры, которые можно разместить вокруг P без наложений таким образом, чтобы все они касались P. Найдите числа поцелуев круга, треугольника, четырехугольника, и т.д.

11. Множество кругов без трех в линию

Какого радиуса должен быть круг, чтобы в него можно было вложить n единичных кругов так, чтобы никакая прямая не пересекала более двух из них?

12. Разность двух ровна одному

Решите следующее уравнение

$$x^m - 2y^n = 1$$

в натуральных числах x, y, m, $n > 1$.

13. Целые части степеней

Рассмотрим последовательности вида $[(\frac{3}{2})^n]$ и $[(\frac{4}{3})^n]$, где n натурально.

a) Докажите, что в каждой из этих последовательностей имеется бесконечно много составных чисел.
b) Верно ли, что эти последовательности также содержат бесконечно много простых чисел?

14. Задача о соседях

Диаметром многоугольника (необязательно выпуклого) называется наибольшее расстояние между двумя его точками.

a) Квадрат со стороной 1 разбит на несколько выпуклых многоугольников. Предположим, что диаметр каждого многоугольника не превосходит $\frac{1}{30}$. Докажите, что найдется многоугольник P, у которого имеется не менее шести *соседей*, то есть многоугольников, касающихся P по крайней мере в одной точке.

b) Задача пункта a) для общего случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

c) Заменим в условии пункта a) константу $\frac{1}{30}$ на положительное действительное число $\epsilon > 0$. Найдите наибольшее натуральное число $N(\epsilon)$ такое, что при любом разбиение квадрата со стороной 1 на выпуклые многоугольники диаметра $\leq \epsilon$, хотя бы у одного из многоугольников будет не менее $N(\epsilon)$ соседей.

d) Задача пункта c) для случая, когда многоугольники разбиения необязательно выпуклы.

15. Перестановки и вероятность

Пусть n – натуральное число. Обозначим через S_n и A_n соответственно симметрическую и знакопеременную группы перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$.

a) Обозначим через p_n вероятность того, что случайно выбранная пара (s, t) перестановок из S_n порождает S_n или A_n. Докажите, что p_n стремится к 1, когда n стремится к бесконечности.

b) Обозначим через $p_n(2)$ вероятность того, что случайно выбранная пара (s, t) перестановок из S_n, такая что коммутатор $[s, t] = sts^{-1}t^{-1}$ является транспозицией, порождает S_n или A_n. Верно ли, что $p_n(2)$ стремится к 1, когда n стремится к бесконечности?

16. English version of some problems

7. Fitting one triangle inside another. Let triangles P и Q have edge lengths p_1, p_2, p_3 and q_1, q_2, q_3 respectively. What are necessary and sufficient conditions on the p_i and q_i for P to contain a congruent copy of Q?

8. Longest chords of polygons. Let P be a plane convex n-gon with side lengths $a_1, \ldots, a_n$. Let b_i be the length of the longest chord of P parallel to the ith side.

a) Prove that

$$\sqrt{8} < \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \leqslant 4.$$

When does the equality on the right hold?

b) Is it true that

$$3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \ ?$$

c) What are 3-dimensional analogs of these inequalities?

9. Reptiles. An n-reptile is a two dimensional region that can be tiled by n congruent tiles, each similar to the whole region.

a) Describe all n-reptiles that are convex polygons.
b) Give examples of non-convex n-reptiles.
c) Give examples of reptiles with "holes".
d) Does there exist a 2-reptile that is also a 3-reptile?

10. Kissing numbers of convex sets. The *kissing number* of a convex set P in the plane is the greatest number of disjoint congruent copies of P that can be arranged around P so that they all touch P. Find the kissing numbers of a disk, a triangle, a quadrilateral, etc.

11. Collections of disks with no three in a line. What is the radius of the smallest disk in which one can place n unit disks so that no straight line intersects more than two of them?

12. Difference of two gives one. Solve the following equation

$$x^m - 2y^n = 1$$

in integers x, y, m, $n > 1$.

13. Integer parts of powers. Consider the sequences $[(\frac{3}{2})^n]$ and $[(\frac{4}{3})^n]$ where n is a positive integer.

a) Prove that there are infinitely many composite numbers in each of these sequences.
b) Do the sequences also contain infinitely many primes?

14. A problem on neighbors. The *diameter* of a polygon (not necessarily convex) is the greatest distance between any two of its points.

a) A unit square is divided into convex polygons. Suppose that the diameter of each of these polygons does not exceed $\frac{1}{30}$. Prove that there is a polygon P with six or more *neighbors*, that is, polygons touching P in at least one point.

b) The same problem in the general case that the polygons are not necessarily convex.

c) Replace in a) the constant $\frac{1}{30}$ by a positive real number $\epsilon > 0$. Find the greatest positive integer $N(\epsilon)$ such that, for any partition of the unit square into convex polygons of diameter $\leq \epsilon$, at least one of these polygons would have $N(\epsilon)$ or more neighbors.

d) The problem c) in the case that the polygons are not necessarily convex.

15. Permutations and probability. For a positive integer n, denote by S_n and A_n respectively the symmetric and the alternating groups of permutations of the numbers $1, 2, \ldots, n$.

a) Let p_n be the probability that a random pair (s, t) of permutations from S_n generate either S_n or A_n. Show that p_n tends to 1 as n tends to infinity.

b) Let $p_n(2)$ be the probability that a random pair (s, t) of permutations from S_n, such that the commutator $[s, t] = sts^{-1}t^{-1}$ is a 3-cycle, generate S_n or A_n. Is it true that $p_n(2)$ tends to 1 as n tends to infinity?

Laboratory of Mathematics, University Paris-Sud 11, 91400 Orsay, FRANCE
E-mail address: david.zmiaikou@gmail.com