Интерполирование многочленами

студент 5-ой группы
3-го курса ФПМИ БГУ:
Змейков Д. Ю.

научные руководители:
доктор физ.-мат. наук **Берник В. И.**
доктор физ.-мат. наук **Бобков В. В.**

Минск 2003

Аннотация

В этой короткой работе иллюстрируется одна интересная идея, связанная с алгебраическим подходом рассмотрения множества произвольно заданных величин. Эта идея направлена, в данном случае, на применение свойств кольца в интерполировании функций.

1. Кольцевое продолжение произведения

Пусть A – модуль (аддитивная группа), а M – моноид из A, т.е. подмножество с ассоциативным произведением и единицей. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Если модуль A порождается множеством M, то существует не более одного продолжения этого произведения на модуль A с образованием кольца.*

Доказательство. Предположим, что A обладает двумя различными продолжениями "$\star$" и "$*$" произведения "$\cdot$" моноида. Тогда

$$\left(\sum m_i a_i\right) \star \left(\sum n_j b_j\right) \neq \left(\sum m_i a_i\right) * \left(\sum n_j b_j\right)$$

для некоторых $m_i, n_j \in \mathbf{Z}$ и $a_i, b_j \in M$.
Однако, ввиду дистрибутивности произведения

$$\begin{aligned}\left(\sum m_i a_i\right) \star \left(\sum n_j b_j\right) &= \sum_{i,j} m_i n_j (a_i \star b_j) = \sum_{i,j} m_i n_j (a_i \cdot b_j) = \\ &= \sum_{i,j} m_i n_j (a_i * b_j) = \left(\sum m_i a_i\right) * \left(\sum n_j b_j\right),\end{aligned}$$

что противоречит предположению. □

Продолжение, упомянутое в теореме, очевидно, существует не всегда. Например, если таблица умножения порождающего модуль $\mathbb{Z}$ моноида $M = \{0, 1\}$ определена по правилу

$*$	0	1
0	1	0
1	0	1

то получим:

$$1 = 1 * 1 = (1 + 0) * (1 + 0) \neq 1 * 1 + 1 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0 = 2.$$

Пусть теперь V – счетномерный K-модуль, т.е. векторное пространство над полем K с базисом

$$\mathbf{e^0}, \mathbf{e^1}, \ldots, \mathbf{e^k}, \ldots$$

Покажем, что множество M, состоящее из прямых $(\alpha\mathbf{e^k}, \alpha \in K)$ этого базиса и наделенное произведением

$$\mathbf{e^i} \cdot \mathbf{e^j} = \mathbf{e^{i+j}}, \tag{1}$$

а также ассоциативным действием скаляров:

$$(\alpha\mathbf{e^i}) \cdot \mathbf{e^j} = \mathbf{e^i} \cdot (\alpha\mathbf{e^j}) = \alpha(\mathbf{e^i} \cdot \mathbf{e^j}),$$

является моноидом.

На самом деле, умножение ассоциативно, а в роли единицы выступает элемент $\mathbf{e^0}$.

Рассмотрим подпространство E элементов векторного пространства V, зависящих от конечного числа базисных векторов, т.е.

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k,$$

где V_k – натянуто на $\mathbf{e^0}, \mathbf{e^1}, \ldots, \mathbf{e^k}$.

Теорема 2. *Модуль E порожден множеством M и с произведением*

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i\mathbf{e^i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\mathbf{e^j}\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) \cdot \mathbf{e^k} \tag{2}$$

является коммутативным кольцом с единицей.

Доказательство. Произведение (2) задает, понятно, продолжение произведения (1) моноида M. Оно, как нетрудно убедиться, ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно. Кроме того, ввиду теоремы 1, это продолжение единственно. □

Замечание . Значит, множество образующих кольца E состоит из одного элемента $\mathbf{e^1}$.

В действительности произведение (2) определяется тензорным произведением векторных пространств

$$V_m \times V_n = V_{m+n},$$

которое, как известно, не зависит от выбора базисов в V_m и V_n (по этому поводу см. [1], с. 340).

2. Интерполяционное кольцо

Предположим, что произвольно заданы некоторая функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и шаг интерполирования $h = \frac{b-a}{N} > 0$.
Призвольным образом доопределим эту функцию на интервале $(b, +\infty)$. Значения $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k), \ldots$, где $x_k = a + kh$, являются в этом случае *независимыми переменными* в смысле общей постановки задачи интерполирования. Поэтому можно положить

$$\mathbf{e^k} = \mathbf{f^k} = f(x_k), \qquad k = \overline{0, \infty}\,,$$

и пространство E конечных комбинаций, как и раньше, будет кольцом с произведением (2). Это кольцо содержит так называемые *конечные разности* [1]

$$\triangle^{\mathbf{k}} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \tbinom{k}{j} \mathbf{f^j}. \tag{3}$$

Теорема 3. *Множество векторов* $\triangle^{\mathbf{0}}, \triangle^{\mathbf{1}}, \ldots, \triangle^{\mathbf{k}}, \ldots$ *является базисом пространства* V*, причем*

$$\triangle^{\mathbf{m}} \cdot \triangle^{\mathbf{n}} = \triangle^{\mathbf{m+n}}. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, система $\triangle^{\mathbf{0}}, \triangle^{\mathbf{1}}, \ldots, \triangle^{\mathbf{k}}, \ldots$ линейно независима. Кроме того, линейное отображение $T_k : V_k^{\triangle} \to V_k^{\mathbf{f}}$ обладает невырожденной верхнетреугольной матрицей.
Равенство (4) следует из соотношения (см. также теорему 4)

$$\sum_{i+j=k} \tbinom{m}{i} \tbinom{n}{j} = \tbinom{m+n}{k},$$

[1] Точнее, конечные разности на нулевом слое. В общем случае

$$\triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \tbinom{k}{j} \mathbf{f^{i+j}}.$$

Название *конечные разности* объясняется очевидным равенством

$$\triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k+1}} = \triangle_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{k}} - \triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{k}}.$$

Обратно, если это реккурентное соотношение имеет место для любых целых чисел i и k с начальными условиями

$$\triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{f^i}, \qquad \triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{1}} = \triangle_{\mathbf{i+1}}^{\mathbf{0}} - \triangle_{\mathbf{i}}^{\mathbf{0}},$$

то, в силу однозначности, следует (3).

для доказательства которого достаточно рассмотреть производящую функцию

$$g(x) = (1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n,$$

сравнивая коэффициенты при x^k. $\square$

Справедлива также обратная теорема, согласно которой можно было с самого начала, полагая $\mathbf{e^k} = \triangle^{\mathbf{k}}$, аналогичным образом рассматривать $\triangle^{\mathbf{k}}$ вместо $\mathbf{f^k}$.

Теорема 4. *Если определить произведение (4), то окажется верным и (1), т. е.*

$$\mathbf{f^i} \cdot \mathbf{f^j} = \mathbf{f^{i+j}}.$$

Доказательство. Вытекает из того, что, как было сказано выше, произведение векторных пространств V_m и V_n не зависит от выбора базиса. $\square$

Итак, мы подошли к следующей теореме.

Теорема 5. *Многочлен*

$$P(x) = \triangle^{\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\triangle^{\mathbf{i}}}{h^i i!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_i) \tag{5}$$

из кольца $E[x]$ интерполирует функцию $f(x)$ с узлами x_k, $k=\overline{0,N}$.

Доказательство. Действительно,

$$P(x_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \triangle^{\mathbf{i}} = (\triangle^{\mathbf{0}} + \triangle^{\mathbf{1}})^k = (\mathbf{f^1})^k = \mathbf{f^k} = f(x_k).$$

$\square$

Следствие 1. *Алгебраический интерполяционный многочлен единственен, поэтому, сравнивая старшие коэффициенты многочленов Ньютона и Лагранжа с (5), получим*

$$f(x_0, x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{f^k}}{\omega'(x_k)} = \frac{\triangle^{\mathbf{N}}}{h^N N!},$$

где $f(x_0, x_1, \dots, x_N)$ – разделенная разность, $\omega(x) = \prod_{i=0}^{N}(x-x_i)$, а N – произвольное натуральное число.

Следствие 2. *В силу равенства (3), обратной к матрице*

$$S = T_k^\top = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \\ (-1)^k\binom{k}{0} & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \dots & (-1)^0\binom{k}{k} \end{pmatrix}$$

для любого целого неотрицательного k *является матрица*

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & & & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & \\ \binom{k}{0} & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{k} \end{pmatrix}.$$

Замечание . Следует отметить, что рассматривая общую конструкцию кольца E, при доказательстве теоремы 5 мы, однако, не выходили за рамки пространства V_N.

Список литературы

[1] Б. Л. ван дер Варден. *Алгебра.* "Наука", Москва, 1976.

[2] В. В. Прасолов. *Многочлены.* МЦНМО, Москва, 2000.

[3] Серж Ленг. *Агебра.* "Мир", Москва, 1968.