

ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROMOTION X-2003
RAPPORT DE STAGE D'OPTION SCIENTIFIQUE

David Zmiaikou

<david.zmiaikou@gmail.com>

Actions de groupes sur les origamis

Option: Géométrie, topologie et systèmes dynamiques
Département de Mathématiques

Directeur
de l'option: Christophe Margerin

Directeur
de stage: Samuel Lelièvre

Organisme
d'accueil: Mathematics Institute
University of Warwick
Coventry CV4 7AL
GB

Dates du stage: 6 avril - 4 juillet 2006

ACTIONS DE GROUPES SUR LES ORIGAMIS

DAVID ZMIAIKOU

RÉSUMÉ. Il est connu qu'on peut considérer les origamis de manières différentes. Par exemple on a des correspondances entre un ensemble d'origamis et des ensembles de graphes ou de sous-groupes d'indice fini de F_2 . Il se trouve que non seulement ces ensembles sont bijectifs, mais aussi des actions de groupes sur eux, introduites naturellement, coïncident. Comme conséquence de ce résultat on obtient une démonstration simple du théorème de Schmithüsen de caractérisation de groupes de Veech. Ensuite on décrit un algorithme pour trouver le groupe de Veech d'un origami.

TABLE DES MATIÈRES

1.	Définition d'un origami	1
2.	Origamis comme couples de permutations	2
3.	Origamis comme graphes orientés	3
4.	Origamis comme revêtements du tore percé	3
5.	Origamis comme sous-groupes d'indice fini de F_2	4
6.	Lien explicite entre les graphes d'origami et les sous-groupes d'indice fini de F_2	4
7.	Diagramme principal	5
8.	Action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathcal{O}_n	5
9.	Action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathcal{G}_n	5
10.	Action à droite de $Aut(F_2)$ sur \mathcal{G}_n	7
11.	Lien entre les actions de $SL(2, \mathbb{Z})$ et $Aut(F_2)$	8
12.	Algorithme pour trouver le groupe de Veech d'un origami	10
12.1.	Trouver un relèvement de $SL(2, \mathbb{Z})$ à $Aut^+(F_2)$	10
12.2.	Trouver le groupe d'un graphe d'origami	10
12.3.	Déterminer si A est dans $\Gamma(O)$	11
12.4.	Trouver des générateurs et des représentants des classes de $\tilde{\Gamma}(O)$	12
12.5.	Trouver $\Gamma(O)$	14
12.6.	Trouver un domaine fondamental pour $\tilde{\Gamma}(O)$	15
13.	Systèmes libres de générateurs de groupes de Veech	15
	Références	17
	Annexe: Programme	18

1. DÉFINITION D'UN ORIGAMI

Définition 1. Un *origami* est un ensemble fini de copies du carreau unitaire euclidien qui sont collées en respectant les règles suivantes :

- chaque côté droit (resp. haut) est identifié par translation avec un côté gauche (resp. bas),
- la surface topologique ainsi obtenue est connexe.

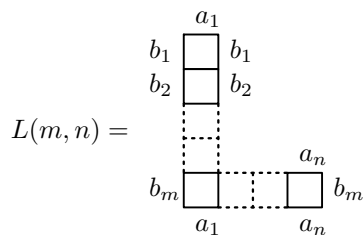
On désignera par \mathcal{O}_n l'ensemble des origamis à n carreaux.

Voilà quelques exemples d'origamis :

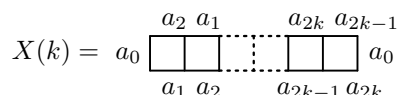
1. « origamis triviaux »

$$T(m, n) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & a_1 & a_2 & & a_n \\ b_1 & \square & \square & \cdots & \square & b_1 \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ b_m & \square & \square & \cdots & \square & b_m \\ & a_1 & a_2 & & a_n \end{array} \end{array}$$

Les surfaces correspondantes sont des tores.

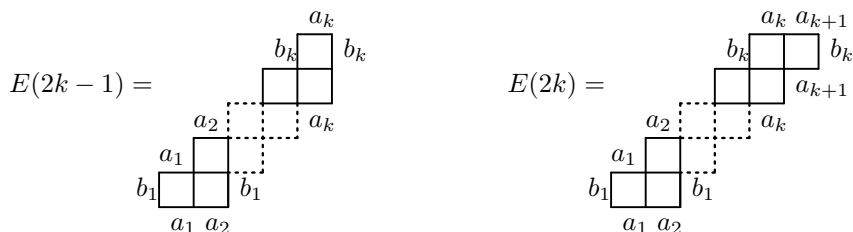
2. « L -origamis »

Les surfaces correspondantes pour $m, n \geq 2$ sont des bretzels, c'est-à-dire de genre 2.

3. « X -origamis »

La surface qui correspond à $X(k)$ est de genre k .

4. « origamis d'escalier »



Les surfaces qui représentent $E(2k-1)$ et $E(2k)$ pour $k \geq 2$ sont de genre k .

2. ORIGAMIS COMME COUPLES DE PERMUTATIONS

Définition 2. On dira qu'un couple (σ, τ) d'éléments du groupe symétrique S_n est *transitif* si le groupe $\langle \sigma, \tau \rangle$ est transitif (c'est-à-dire pour tous i et j , $1 \leq i, j \leq n$, dans ce groupe il y a une permutation qui envoie i sur j).

On désignera l'ensemble des couples transitifs d'éléments de S_n par $(S_n \times S_n)^t$.

On peut numéroter les carreaux d'un origami par $1, 2, \dots, n$ et lui associer deux permutations σ et τ telles que le côté droit (resp. haut) du carreau i est collé au côté gauche (resp. bas) du côté $\sigma(i)$ (resp. $\tau(i)$). D'après la définition d'un origami le couple (σ, τ) sera transitif.

Par exemple pour l'origami sur la figure 1 (où les côtés horizontaux (verticaux) avec le même nombre de traits sont identifiés) on a $\sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\tau = (1\ 4)$.

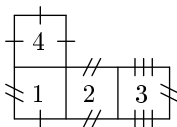


FIG. 1. Origami $L(2,3)$

Puisque les origamis ne dépendent pas de la numérotation des carreaux on a la bijection

$$(1) \quad \mathcal{O}_n \longleftrightarrow (S_n \times S_n)^t / S_n,$$

où la partie droite est le quotient pour l'action du groupe S_n par conjugaison : $\alpha \cdot (\sigma, \tau) = (\alpha\sigma\alpha^{-1}, \alpha\tau\alpha^{-1})$.

3. ORIGAMIS COMME GRAPHES ORIENTÉS

Définition 3. Un graphe fini orienté nous allons appeler un *graphe d'origami* si

- ses sommets sont numérotés par $1, 2, \dots, n$,
- ses arêtes sont marquées par x et y de telle manière que de chaque sommet sortent exactement une arête x et une arête y et dans chaque sommet entrent exactement une arête x et une arête y ,
- ce graphe est connexe.

L'ensemble des graphes d'origamis à n sommets on désignera par \mathcal{G}_n .

Tout origami numéroté donne lieu à un graphe d'origami : les sommets sont les carreaux et il y a une arête de i à j marquée par x (resp. y) si le côté droit (resp. haut) du carreau i est identifié avec le côté gauche (resp. bas) du carreau j . Autrement dit si l'origami est représenté comme un couple (σ, τ) , alors les flèches x et y sont définies par les permutations σ et τ respectivement.

Par exemple le graphe illustré sur la figure 2 correspond à l'origami $L(2, 3)$ de la figure 1.

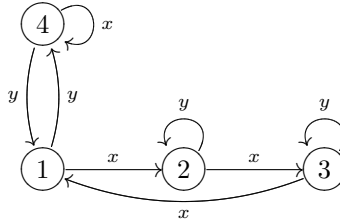


FIG. 2. Graphe d'origami de $L(2, 3)$

Donc, on a la bijection

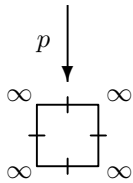
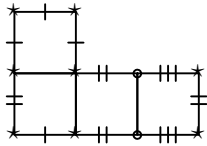
$$(2) \quad \mathcal{O}_n \longleftrightarrow \mathcal{G}_n / S_n,$$

où S_n agit sur les graphes d'origamis en permutant (renumérotant) les sommets.

On va dire que deux graphes d'origamis G_1 et G_2 sont *équivalents* ($G_1 \sim G_2$) s'ils sont dans la même orbite sous l'action de S_n .

4. ORIGAMIS COMME REVÊTEMENTS DU TORE PERCÉ

Il y a un seul origami à un carreau et sa surface est un tore \mathbb{T} . Tous les sommets du carreau sont collés en un point sur le tore, on désignera ce point par ∞ .



Soient maintenant O un origami et X sa surface (topologique) fermée. En projetant chaque carreau de O sur le carreau de \mathbb{T} on obtient un revêtement ramifié du tore $p : X \rightarrow \mathbb{T}$ avec au plus un point de branchement (∞). Le degré de ce revêtement est égal au nombre de carreaux de O .

Par exemple pour l'origami $L(2, 3)$ on obtient un revêtement de degré 4 ramifié en les points \star et \circ .

En considérant les surfaces percées

$$X^* = X - p^{-1}(\infty) \quad \text{et} \quad \mathbb{T}^* = \mathbb{T} - \{\infty\}$$

le revêtement induit $p : X^* \rightarrow \mathbb{T}^*$ sera non-ramifié.

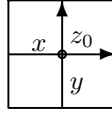
Réciproquement, soit $p : X^* \rightarrow \mathbb{T}^*$ un revêtement non-ramifié fini du tore percé, où X^* est obtenu d'une surface compacte X en éliminant un nombre fini de points. Soient n le degré de p et $\pi : \pi_1(\mathbb{T}^*, z_0) \rightarrow S_n$ la monodromie de p (définie à conjugaison dans S_n près). Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{T}^*, z_0)$ est isomorphe au groupe libre F_2 engendré par deux éléments x et y , qu'on peut identifier aux lacets medians de \mathbb{T}^* (cf. fig. 3).

Donc, le couple de permutations $(\pi(x), \pi(y))$ définit un origami.

Puisque pour deux revêtements équivalents leurs couples $(\pi(x), \pi(y))$ sont conjugués par un élément de S_n , on a la bijection

$$(3) \quad \mathcal{O}_n \longleftrightarrow \mathcal{R}_n,$$

où \mathcal{R}_n est l'ensemble des classes d'équivalence de revêtements $p : X^* \rightarrow \mathbb{T}^*$ de degré n .

FIG. 3. Le groupe fondamental de \mathbb{T}^* est F_2 5. ORIGAMIS COMME SOUS-GROUPES D'INDICE FINI DE F_2

D'après le théorème du revêtement universel les classes d'équivalence de revêtements de \mathbb{T}^* sont en correspondance avec les classes de conjugaison de sous-groupes du groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{T}^*) = F_2$. Ainsi on obtient une bijection composée

$$(4) \quad \mathcal{O}_n \longleftrightarrow \mathcal{R}_n \longleftrightarrow \text{SG}_n(F_2)/F_2,$$

où $\text{SG}_n(F_2)$ désigne l'ensemble des sous-groupes d'indice n de F_2 et le groupe F_2 agit sur cet ensemble par conjugaisons.

6. LIEN EXPLICITE ENTRE LES GRAPHES D'ORIGAMI ET LES SOUS-GROUPES D'INDICE FINI DE F_2

Soit G un graphe d'origami à n sommets. On écrira tous les cycles non-orientés passant par le sommet 1 comme des mots de l'alphabet $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, où les lettres x^{-1} et y^{-1} signifient la direction de parcours inverse à la direction d'arêtes. Le groupe H engendré par ces mots est d'indice n dans F_2 . En effet tout sommet i de G peut être considéré comme une classe de F_2 modulo H , qui est plus exactement égale à Hw , où w est le mot encodant un chemin de 1 à i . Par définition de H deux mots w_1 et w_2 connectent le sommet 1 avec le même sommet i si et seulement si $w_1w_2^{-1} \in H$.

Il n'est pas difficile de comprendre qu'en réalité le groupe H est engendré déjà par les cycles orientés passant par 1 (c'est-à-dire par des mots de l'alphabet $\{x, y\}$). Par exemple pour le graphe sur la figure 2 on a

$$H = \langle x^3, xyx^2, x^2yx, yxy, y^2 \rangle.$$

Cela veut en particulier dire que H est engendré par $n+1$ éléments, ce qui concorde au théorème de Schreier (cf. [Schr 27] ou [Kur 67]), d'après lequel un sous-groupe d'indice fini n d'un groupe libre de rang fini r a le rang fini k qui s'exprime comme $k = n(r-1) + 1$.

Réciproquement soit H un groupe d'indice fini n . On considère les classes à droite de F_2 modulo H comme sommets d'un graphe G , on numérote la classe H par 1 et les autres classes arbitrairement par $2, 3, \dots, n$. Ensuite on introduit une flèche x (resp. y) de Hw à Hwx (resp. Hwy) pour chaque classe Hw . Il est immédiat de vérifier que le graphe G ainsi obtenu est un graphe d'origami.

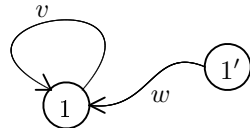
Donc on a une bijection

$$(5) \quad \mathcal{G}_n/S_{n-1} \longleftrightarrow \text{SG}_n(F_2),$$

où le groupe S_{n-1} agit sur les graphes d'origami en permutant les sommets $2, 3, \dots, n$.

Comment changera le groupe du graphe G si l'on renumérote le sommet 1 aussi ?

Réponse: le groupe final sera conjugué au groupe initial. En effet, si le nouveau sommet 1 (qu'on dénotera sur la figure 4 par $1'$) est connecté avec l'ancien par un chemin w , alors les nouveaux cycles passant par $1'$ sont conjugués dans F_2 avec les anciens par w .



$$1' \cdot wvw^{-1} = 1'$$

FIG. 4. On renumérote le sommet 1

Réciproquement, deux sous-groupes d'indice fini conjugués dans F_2 définissent (à l'action de S_{n-1} près, cf. (5)) deux graphes équivalents. Effectivement si dans un graphe d'origami G de groupe H le chemin w^{-1} connecte 1 avec i , alors en renumérotant le sommet i en 1 (et les autres sommets arbitrairement) on obtiendra un graphe $G' \sim G$ dont le groupe est wHw^{-1} .

Donc, on a une bijection

$$(6) \quad \mathcal{G}_n/S_n \longleftrightarrow \text{SG}_n(F_2)/F_2,$$

qui est en fait en concordance avec (2) et (4).

7. DIAGRAMME PRINCIPAL

Toutes les bijections (sauf (5)) que nous avons construites se lient en le diagramme commutatif :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_n & \longleftrightarrow \mathcal{R}_n \\ & \uparrow & \swarrow \\ & \mathcal{G}_n/S_n & \xrightarrow{\text{SG}_n(F_2)/F_2} \mathcal{R}_n \\ (\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)^t/\mathcal{S}_n & \longleftrightarrow & \mathcal{G}_n/S_n \end{array}$$

Par exemple d'après ce diagramme deux graphes d'origami sont équivalents si et seulement si leurs groupes sont conjugués et les bijections directe ou composées entre \mathcal{G}_n/S_n et $\text{SG}_n(F_2)/F_2$ coïncident.

8. ACTION DE $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ SUR \mathcal{O}_n

Soit O un origami à n carreaux. On peut le représenter sur le plan \mathbb{R}^2 comme réunion disjointe P de figures cellulaires avec des identifications de côtés de carreaux. Les figures de P sous l'action d'une matrice $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ vont consister en « petits » parallélogrammes. Toutefois on peut découper les nouvelles figures en morceaux et recoller ces morceaux en respectant les identifications de telle façon que l'ensemble obtenu soit encore une réunion de figures cellulaires (cf. un exemple sur la figure 5). L'origami qui lui correspond on désignera par $A \cdot O$. Cet origami ne dépend ni de la représentation de O sur le plan euclidien, ni de la manière de découper et de recoller.

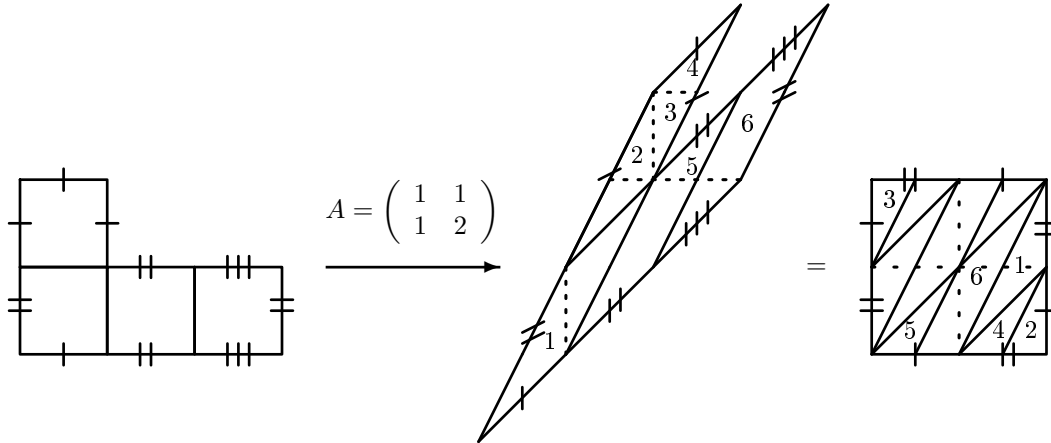


FIG. 5. Action d'une matrice sur $L(2,3)$

Ainsi on a une action de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathcal{O}_n :

$$\text{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathcal{O}_n, \quad (A, O) \mapsto A \cdot O.$$

Définition 4. Le stabilisateur d'un origami O sous cette action s'appelle le *groupe de Veech* de O et est normalement noté $\Gamma(O)$.

9. ACTION DE $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ SUR \mathcal{G}_n

On va identifier ici \mathcal{G}_n avec $(\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n)^t$.

On rappelle que le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ est engendré par les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les relations $S^{-1} = -S$ et $T^{-1} = -STSTS$ on peut présenter toute matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ en forme

$$(8) \quad A = W(S, T),$$

où $W(S, T)$ est un mot dans l'alphabet $\{S, T\}$.

Afin de définir une action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur \mathcal{G}_n il suffit de déterminer comment S et T agissent sur \mathcal{G}_n . Posons

$$\begin{aligned} S : \mathcal{G}_n &\longrightarrow \mathcal{G}_n, & (\sigma, \tau) &\mapsto (\tau^{-1}, \sigma), \\ T : \mathcal{G}_n &\longrightarrow \mathcal{G}_n, & (\sigma, \tau) &\mapsto (\sigma, \tau\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

Alors pour tout (σ, τ) on a $S^2 \cdot (\sigma, \tau) = (ST)^3 \cdot (\sigma, \tau) = (\sigma^{-1}, \tau^{-1})$ et l'action d'une matrice $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ne dépend pas de la représentation (8). Par exemple $S^{-1} = S^3$, $T^{-1} = S^3 T S T S$ et

$$\begin{aligned} S^{-1} : (\sigma, \tau) &\mapsto (\tau, \sigma^{-1}), \\ T^{-1} : (\sigma, \tau) &\mapsto (\sigma, \tau\sigma) \end{aligned}$$

sont les inverses des actions de S et T .

L'action que nous avons définie n'a pas été choisie au hasard :

Proposition 1. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{G}_n & \longrightarrow & \mathcal{G}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{O}_n & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par la projection $\mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{G}_n/S_n \longleftrightarrow \mathcal{O}_n$.

Démonstration. Il nous faut montrer que si O est un origami numéroté avec un graphe $G = (\sigma, \tau)$, alors on peut numéroté l'origami $A \cdot O$ de telle façon que son graphe soit $A \cdot G$. Il suffit de le vérifier pour A égal à S et T . Pour $A = S$ c'est évident, car S est une rotation d'angle $\pi/2$: on laisse la numérotation la même (cf. fig. 6).

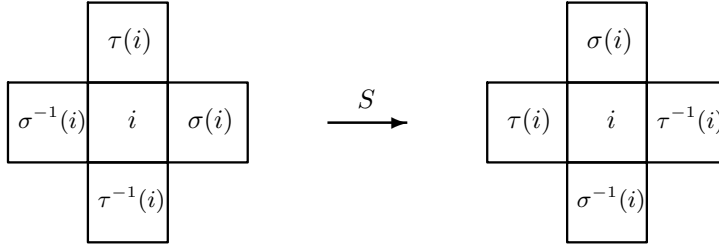


FIG. 6. Action de S

Le cas $A = T$ est illustré sur la figure 7. Le nouveau carreau i va consister en les images du triangle bas de l'ancien i et du triangle haut de l'ancien $\sigma^{-1}(i)$.

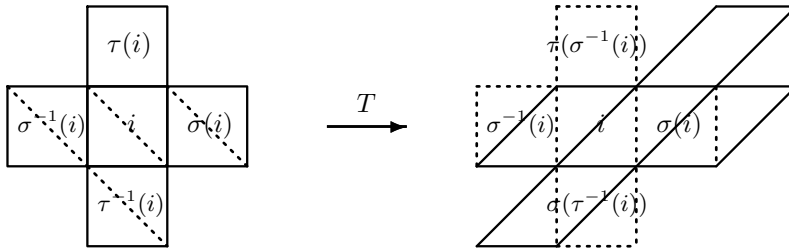


FIG. 7. Action de T

Ainsi la proposition est démontrée. □

L'équivalent de cette proposition est évidemment vrai pour les deux actions à droite suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{G}_n, & (G, A) &\mapsto G \cdot A, \\ \mathcal{O}_n \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{O}_n, & (O, A) &\mapsto O \cdot A, \end{aligned}$$

où $G \cdot A = A^{-1} \cdot G$ et $O \cdot A = A^{-1} \cdot O$.

10. ACTION À DROITE DE $\text{Aut}(F_2)$ SUR \mathcal{G}_n

On note $\text{Aut}(F_2)$ le groupe des automorphismes du groupe libre F_2 à deux générateurs x et y . Soient $\text{Inn}(F_2)$ et $\text{Out}(F_2)$ les groupes des automorphismes internes et externes de F_2 respectivement, c'est-à-dire on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \text{Inn}(F_2) \longrightarrow \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \text{Out}(F_2) \longrightarrow 1.$$

Il est connu (cf. [Niels 17] ou [ChMag 82]) que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \beta : \text{Out}(F_2) &\longrightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}), \\ \gamma &\longmapsto \begin{pmatrix} s_x(\gamma(x)) & s_x(\gamma(y)) \\ s_y(\gamma(x)) & s_y(\gamma(y)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $s_x(w)$ et $s_y(w)$ sont la somme des puissances de x et y respectivement dans le mot $w \in F_2$.

On désignera par $\hat{\beta}$ la composé de β avec la projection canonique :

$$\hat{\beta} : \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \text{Out}(F_2) \xrightarrow{\cong} \text{GL}(2, \mathbb{Z})$$

et soient $\text{Aut}^+(F_2)$ l'image réciproque de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ et $\text{Out}^+(F_2) = \text{Aut}^+(F_2)/\text{Inn}(F_2)$.

Par exemple les homomorphismes

$$\begin{aligned} \gamma_S : F_2 &\longrightarrow F_2, & x &\mapsto y \\ & & y &\mapsto x^{-1}, \\ \gamma_T : F_2 &\longrightarrow F_2, & x &\mapsto x \\ & & y &\mapsto xy \end{aligned}$$

appartiennent à $\text{Aut}^+(F_2)$ et leurs images sont $\hat{\beta}(\gamma_S) = S$ et $\hat{\beta}(\gamma_T) = T$.

Donc si $A = W(S, T)$ est une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, alors l'automorphisme

$$\gamma_A := W(\gamma_S, \gamma_T)$$

est dans l'image réciproque de A par $\hat{\beta}$.

Nous allons définir une action à droite

$$\mathcal{G}_n \times \text{Aut}(F_2) \longrightarrow \mathcal{G}_n, \quad (G, \gamma) \mapsto G \cdot \gamma,$$

de la manière suivante. On construit un nouveau graphe $G \cdot \gamma$ ainsi : on introduit une flèche x , resp. y , de i à j dans le graphe $G \cdot \gamma$ si et seulement si le chemin $\gamma(x)$, resp. $\gamma(y)$, connecte le sommet i avec le sommet j dans le graphe G . (On peut imaginer qu'à la place de renuméroter les sommets on redessine les arêtes.) Un exemple pour le graphe d'origami $L(2, 3)$ est illustré sur la figure 8.

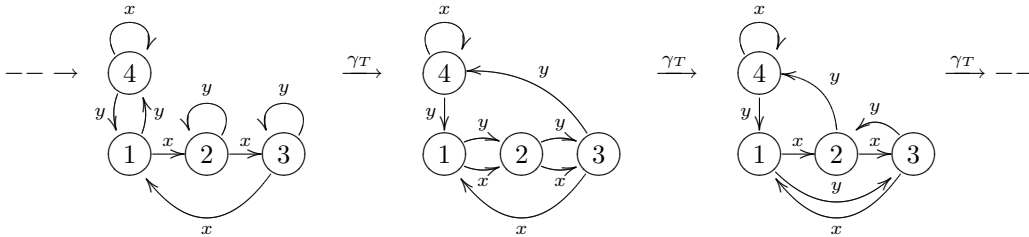


FIG. 8. Action de γ_T sur des graphes d'origami

Cette construction donne bien une action à droite de $\text{Aut}(F_2)$ sur \mathcal{G}_n . En effet, soit γ' un autre automorphisme, alors il y a une flèche x , resp. y , de i à j dans le graphe $G \cdot (\gamma\gamma')$ si et seulement si dans le graphe G le chemin $\gamma(\gamma'(x))$, resp. $\gamma(\gamma'(y))$, connecte i avec j , c'est-à-dire dans le graphe $G \cdot \gamma'$ il y a une flèche x , resp. y , de i à j . Ainsi on obtient

$$G \cdot (\gamma\gamma') = (G \cdot \gamma) \cdot \gamma'.$$

Lemme 1. Si H est le groupe d'un graphe d'origami G , alors le groupe du graphe $G \cdot \gamma$ est $\gamma^{-1}(H)$.

Démonstration. Parcourir une flèche x ou y du sommet i au sommet j dans le graphe $G \cdot \gamma$ signifie parcourir le chemin $\gamma(x)$ ou $\gamma(y)$ respectivement de i à j dans le graphe G . Donc si $w(x, y)$ est un cycle dans $G \cdot \gamma$, alors $\gamma(w(x, y))$ est un cycle dans G . Puisque les groupes des graphes G et $G \cdot \gamma$ sont de même indice dans F_2 et le premier contient l'image du deuxième par γ , le groupe de $G \cdot \gamma$ est exactement $\gamma^{-1}(H)$. \square

Comme corollaire immédiat de ce lemme et de (5) on a

Proposition 2. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_n \times \text{Aut}(F_2) & \longrightarrow & \mathcal{G}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{SG}_n(F_2) \times \text{Aut}(F_2) & \longrightarrow & \text{SG}_n(F_2) \end{array}$$

où la flèche basse est l'action à droite $(H, \gamma) \mapsto \gamma^{-1}(H)$ et les flèches verticales sont induites par la projection $\mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{G}_n/S_{n-1} \longleftrightarrow \text{SG}_n(F_2)$.

En particulier pour le stabilisateur d'un sous-groupe H d'indice fini de F_2 on obtient

$$\text{Stab}_{\text{Aut}(F_2)}(H) = \{\gamma \in \text{Aut}(F_2) \mid G \text{ et } G \cdot \gamma \text{ sont dans la même classe de } \mathcal{G}_n/S_{n-1}\},$$

où G est un graphe de H .

Si maintenant γ est un automorphisme interne, alors d'après le lemme ci-dessus les groupes de G et $G \cdot \gamma$ sont conjugués dans F_2 et d'après (6) les graphes G et $G \cdot \gamma$ sont équivalents. On déduit de la proposition précédente le résultat suivant :

Proposition 3. *Les deux actions à droite*

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_n/S_n) \times \text{Out}(F_2) &\longrightarrow \mathcal{G}_n/S_n, \\ (\text{SG}_n(F_2)/F_2) \times \text{Out}(F_2) &\longrightarrow \text{SG}_n(F_2)/F_2 \end{aligned}$$

coïncident pour la bijection $\mathcal{G}_n/S_n \longleftrightarrow \text{SG}_n(F_2)/F_2$.

En particulier on obtient

$$\text{Inn}(F_2) \cup \text{Stab}_{\text{Aut}(F_2)}(H) = \{\gamma \in \text{Aut}(F_2) \mid G \text{ et } G \cdot \gamma \text{ sont dans la même classe de } \mathcal{G}_n/S_n\},$$

où la partie gauche est le groupe engendré par la réunion des deux groupes indiqués.

11. LIEN ENTRE LES ACTIONS DE $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ ET $\text{Aut}(F_2)$

Théorème 1. *Les deux actions à droite suivantes*

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_n/S_n) \times \text{Out}^+(F_2) &\longrightarrow \mathcal{G}_n/S_n, \\ \mathcal{O}_n \times \text{SL}(2, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

coïncident pour la bijection $\mathcal{G}_n/S_n \longleftrightarrow \mathcal{O}_n$ et l'isomorphisme $\text{Out}^+(F_2) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.

En particulier pour le groupe de Veech d'un origami O on a

$$\Gamma(O) = \hat{\beta}(\{\gamma \in \text{Aut}(F_2) \mid G \text{ et } G \cdot \gamma \text{ sont dans la même classe de } \mathcal{G}_n/S_n\}),$$

où G est un graphe d'origami de O .

Démonstration. En prenant en compte la Proposition 1, il suffit de montrer que pour tout origami $O \in \mathcal{O}_n$ et toute matrice $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ on a

$$G \cdot \gamma \sim G \cdot A,$$

où G est un graphe de O et γ est un relèvement de A . Sans perte de généralité posons $\gamma = \gamma_A$.

En réalité on obtiendra même

$$(9) \quad G \cdot \gamma_A = G \cdot A.$$

Tout ce qu'il nous faut c'est de vérifier cette égalité pour $A = S$ et $A = T$. Or, si $G = (\sigma, \tau)$, alors évidemment on a

$$(\sigma, \tau) \cdot \gamma_S = (\tau, \sigma^{-1}) = S^{-1} \cdot (\sigma, \tau) \quad \text{et} \quad (\sigma, \tau) \cdot \gamma_T = (\sigma, \tau\sigma) = T^{-1} \cdot (\sigma, \tau),$$

ce qui achève la démonstration. □

D'après ce théorème et la Proposition 3 les actions à droite

$$(\text{SG}_n(F_2)/F_2) \times \text{Out}^+(F_2) \longrightarrow \text{SG}_n(F_2)/F_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_n \times \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{O}_n$$

coïncident aussi et en particulier on obtient le théorème de Gabriela Schmithüsen suivant (cf. [Schm 04]) :

Corollaire 1 (Caractérisation de Schmithüsen de groupes de Veech). *Le groupe de Veech d'un origami O est égal à*

$$\Gamma(O) = \hat{\beta}(\text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(H)),$$

où H est un sous-groupe de F_2 qui correspond à O .

Démonstration. Effectivement, on a $\Gamma(O) = \hat{\beta}(\text{Inn}(F_2) \cup \text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(H)) = \hat{\beta}(\text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(H))$. \square

Le corollaire suivant nous permettra de vérifier algorithmiquement si une matrice est dans le groupe de Veech d'un origami.

Corollaire 2. *Soient O un origami à n carreaux, G un graphe de O et soit H le groupe de ce graphe engendré par les éléments h_0, h_1, \dots, h_n .*

Alors une matrice $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ est dans le groupe de Veech $\Gamma(O)$ si et seulement si il existe un sommet i du graphe G tel que

$$i \cdot \gamma_A(h_k) = i \quad \text{pour tout } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Démonstration. D'après le Théorème 1 ou l'égalité (9) la matrice A est dans $\Gamma(O)$ si et seulement si

$$G \sim G \cdot \gamma_A^{-1},$$

c'est-à-dire le groupe du graphe $G \cdot \gamma_A^{-1}$ est conjugué à H . Or, le groupe de ce graphe est exactement $\gamma(H)$, ce qui donne le résultat nécessaire. \square

On dit qu'un sous-groupe de F_2 est *caractéristique* s'il est invariant par tout automorphisme de F_2 . D'après le Théorème 1 aux groupes caractéristiques correspondent les origamis avec $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ comme groupe de Veech. De tels origamis on va également appeler *caractéristiques*.

Corollaire 3 (cf. aussi [Herrl 05]). *Il y a une infinité d'origamis caractéristiques non-triviaux.*

Démonstration. Soit O un origami arbitraire et H un groupe associé à O . Alors le groupe

$$H' = \bigcap_{\gamma \in \text{Aut}^+(F_2)} \gamma(H)$$

est caractéristique et le groupe de Veech de l'origami O' qui lui correspond est $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$. \square

L'un des aspects intéressants du Théorème 1 est qu'il permet de reformuler certains résultats concernant les origamis en langage de théorie de groupes.

Par exemple un théorème de Pascal Hubert et Samuel Lelièvre (cf. [HubLel 06]) dit que les surfaces à $n > 3$ petits carreaux dans la strate $\mathcal{H}(2)$, où n est un nombre premier, forment exactement deux disques de Teichmüller.

On dira qu'un représentant H d'une classe de $\text{SG}_n(F_2)/F_2$ est un *point d'ordre m* si

$$(10) \quad H \cap K = K^m,$$

où $K = \langle [x, y] \rangle$ est le groupe cyclique engendré par le commutateur de x et y .

Le groupe $\text{Out}^+(F_2)$ agit sur l'ensemble $\text{SG}_n(F_2)/F_2$ en préservant la propriété d'une classe d'« avoir un point d'ordre m », car si $\gamma \in \text{Aut}^+(F_2)$, alors d'après un théorème de Nielsen (cf. [Niels 17] ou [ChMag 82]) l'élément $\gamma([x, y])$ est conjugué au $[x, y]$.

Maintenant on peut énoncer un équivalent du résultat ci-dessus :

Théorème 2 (Hubert, Lelièvre). *Soit $n > 3$ un nombre premier, alors l'ensemble des classes de $\text{SG}_n(F_2)/F_2$ avec des points d'ordre 1 et exactement 3 points d'ordre 3 forment deux orbites sous l'action de $\text{Out}^+(F_2)$.*

12. ALGORITHME POUR TROUVER LE GROUPE DE VEECH D'UN ORIGAMI

L'algorithme qu'on va présenter ici est principalement donné dans l'article [Schm 04]. Dans cet article il est basé sur les deux pas suivants. Premièrement, conformément au Corollaire 2 on écrit une fonction qui détermine si une matrice est dans le groupe de Veech $\Gamma(O)$ ou non. Deuxièmement, en utilisant la méthode de Reidemeister-Schreier on trouve des générateurs et des représentants des classes de $\Gamma(O)$ dans $SL(2, \mathbb{Z})$. Le défaut de cette méthode est que les générateurs ainsi obtenus ne seront pas « libres » au sens qu'il y aura beaucoup de relations superflus entre eux.

C'est pourquoi nous avons adapté le procédé de Schmithüsen décrit dans [Schm 04], à savoir :

- ▷ au lieu de considérer les matrices T et S comme générateurs de groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$ pour la méthode de Reidemeister-Schreier, on prend les matrices TS et S . Presque toujours dans ce cas-là le Programme donne des systèmes de générateurs plus petits et parfois même des systèmes libres,
- ▷ les domaines fondamentaux pour $\Gamma(O)$ qu'on construit sont plus adaptés pour la méthode de Kulkarni,
- ▷ on applique la méthode de Kulkarni afin de trouver empiriquement des systèmes libres de générateurs.

Nous avons réalisé un Programme en Java, qu'on a mis en Annexe.

12.1. **Trouver un relèvement de $SL(2, \mathbb{Z})$ à $Aut^+(F_2)$.** Comme on a déjà vu, si $A = W(S, T)$ est une matrice de $SL(2, \mathbb{Z})$, alors l'automorphisme $\gamma_A = W(\gamma_S, \gamma_T)$ est l'un de ses relèvements dans $Aut^+(F_2)$.

Algorithme pour trouver un relèvement de A dans $Aut^+(F_2)$

```

function LIFT ( Matrix  $A \in SL(2, \mathbb{Z})$  )
  int  $m := 1$ 
  Matrix  $A_m := \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}$ ,  $A_1 := A$ 
  // Main loop
  while  $c_m \neq 0$ 
     $k_m := d_m \operatorname{div} c_m$  // c'est-à-dire  $d_m = k_m c_m + r_m$ , où  $|r_m| \in \{0, 1, \dots, |c_m| - 1\}$ 
     $A_{m+1} := \begin{pmatrix} -a_m k_m + b_m & -a_m \\ r_m & -c_m \end{pmatrix} = A_m T^{-k_m} S$ 
     $m := m + 1$ 
  end while

  // Maintenant  $c_m = 0$  et donc on a  $A = \pm T^{\pm b_m} S T^{k_{m-1}} \dots S T^{k_1}$ 
  en remplaçant  $T^{-1}$  par  $-STSTS$  et  $-I$  par  $S^2$  on obtient
     $A = W(S, T)$ 
  alors  $\gamma_A := W(\gamma_S, \gamma_T)$ 

return  $\gamma_A$ 

```

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = T^2 S T^2 S T^3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_A : \begin{array}{l} x \mapsto x^2 y x^2 y x^{-1}, \\ y \mapsto x^2 y x^2 y x y x^2 y x y x^2 y x^{-1} y^{-1} x^{-2} \end{array}$$

12.2. **Trouver le groupe d'un graphe d'origami.** Soit G un graphe d'origami à n sommets. Par définition son groupe H est engendré par les cycles passant par le sommet 1. Pour trouver ces cycles on exploitera l'algorithme de Floyd-Warshall qui détermine les chemins les plus courts entre tous les sommets d'un graphe orienté en temps cubique. À la fin l'élément $\operatorname{pred}[i, j]$ donne le numéro du sommet qui précède j sur l'un des plus courts chemins de i à j . Pour plus de détails cf. le Programme en Annexe.

Algorithme de Floyd-Warshall

```

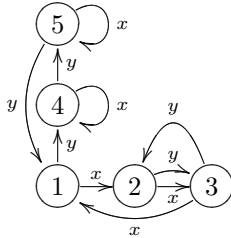
function FW ( int[1...n, 1...n] graph )
  // Initialisation
  int[1...n, 1...n] dist := graph
  int[1...n, 1...n] pred
  for i from 1 to n
    for j from 1 to n
      if dist[i, j] < n + 1
        pred[i, j] := i
  // Main loop
  for k from 1 to n
    for i from 1 to n
      for j from 1 to n
        if dist[i, j] > dist[i, k] + dist[k, j]
          dist[i, j] := dist[i, k] + dist[k, j]
          pred[i, j] := pred[k, j]

return pred

```

Pour le graphe $G = (\sigma, \tau)$, où $\sigma = (123)$ et $\tau = (145)(23)$, on obtient

Exemple 2.



$$\text{pred} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et ensuite on trouve que $H = \langle x^3, y^3, xyx, x^2yx^2, yxy^2, y^2xy \rangle$, cf. la fonction `static Word[] H(Origami 0)` dans le Programme.

12.3. **Déterminer si A est dans $\Gamma(O)$.** Le Corollaire 2 donne immédiatement l'algorithme suivant.

Algorithme pour déterminer si A est dans $\Gamma(O)$

```

function isInGamma ( Matrix A ∈ SL(2, Z) )
  boolean result := false
  Automorphism  $\gamma_A = \text{LIFT}(A)$ 
  Group  $H = \langle h_0, h_1, \dots, h_n \rangle$  // le groupe d'un graphe d'origami de  $O$ , cf. ci-dessus
  // Main loop
  for i from 1 to n
    boolean help := true
    for j from 0 to n
      if  $i \cdot \gamma_A(h_j) \neq i$ 
        help := false
    if help = true
      result := true

return result

```

Exemple 3. Soient $O = L(2, 3)$ et $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} = TST^4ST^2ST^2S$, alors

$$H = \langle x^3, xyx^2, x^2yx, yxy, y^2 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \gamma_A : \quad x &\mapsto xyxyxyxy^2xyxyxy^2xyxy^2xyxyxyx^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}, \\ y &\mapsto xyxy^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-2}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1}y^{-1}x^{-1} \end{aligned}$$

et on obtient que A appartient à $\Gamma(O)$.

12.4. **Trouver des générateurs et des représentants des classes de $\tilde{\Gamma}(O)$.** On considère le groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) / \langle -I \rangle$ et on va noter de la même manière une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et sa projection dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Soit O un origami, on désignera par $\tilde{\Gamma}(O)$ l'image du groupe de Veech $\Gamma(O)$ dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. La méthode de Reidemeister-Schreier (cf. par exemple [LynSc 77]) permet de trouver des générateurs de $\tilde{\Gamma}(O)$ et des représentants des classes modulo ce groupe.

L'idée est de parcourir une partie de l'arbre illustré sur la figure 9. Puisque les matrices U et S , où $U = TS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, engendrent $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, cet arbre contient tous les éléments du groupe $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

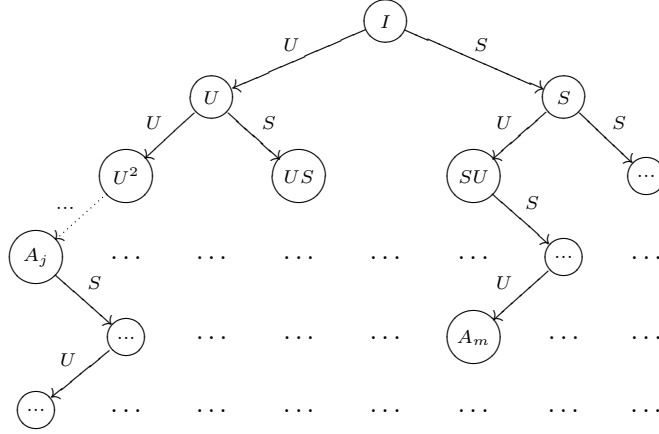


FIG. 9. *Arbre d'éléments de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$*

Algorithme pour trouver $\tilde{\Gamma}(O)$

```

function PGamma ( Origami  $O$  )
  List<Matrix> RÊP := null
  List<Matrix> GÊN := null
  Matrix  $A := I$ 
  add  $A$  to RÊP

  // Main loop
  boolean repeat := true
  while repeat = true
    Matrix  $B := A \cdot U$ 
    boolean addtoRep := true
    for each  $D \in \text{RÊP}$ 
      if  $BD^{-1} \in \Gamma(O)$  or  $-BD^{-1} \in \Gamma(O)$ 
        add  $BD^{-1}$  to GÊN
        addtoRep := false
    if addtoRep = true
      add  $B$  to RÊP

    Matrix  $C := A \cdot S$ 
    addtoRep := true
    for each  $D \in \text{RÊP}$ 
      if  $CD^{-1} \in \Gamma(O)$  or  $-CD^{-1} \in \Gamma(O)$ 
        add  $CD^{-1}$  to GÊN
        addtoRep := false
    if addtoRep = true
      add  $C$  to RÊP

    if  $A$  a un successeur  $A'$  dans la liste RÊP
       $A := A'$ 
    else repeat := false
  end while

return RÊP et GÊN

```

Exemple 4. Pour l'origami $L(2,3)$ on obtient

RÊP (9 matrices):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

GÊN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pour l'origami de l'Exemple 2 on a

RÊP (24 matrices):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

GÊN:

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

12.5. **Trouver** $\Gamma(O)$. Maintenant en connaissant $\tilde{\Gamma}(O)$ on peut facilement déterminer $\Gamma(O)$.

Algorithme pour trouver $\Gamma(O)$

function Gamma (Origami O)

List<Matrix> REP := **null**

List<Matrix> GEN := **null**

 trouver $R\tilde{E}P$ et $G\tilde{E}N$ en utilisant PGamma(O)

if $-I \in \Gamma(O)$

 add $-I$ to GEN

for each $A \in G\tilde{E}N$

 add A to GEN

for each $A \in R\tilde{E}P$

 add A to REP

else

for each $A \in G\tilde{E}N$

if $A \in \Gamma(O)$

 add A to GEN

else add $-A$ to GEN

for each $A \in R\tilde{E}P$

 add A to REP

 add $-A$ to REP

return REP et GEN

Exemple 5. Pour l'origami $L(2,3)$ et l'origami de l'Exemple 2 on a $-I \in \Gamma(O)$ et le Programme donne

$$REP = R\tilde{E}P,$$

$$GEN = G\tilde{E}N \cup \{-I\},$$

où $R\tilde{E}P$ et $G\tilde{E}N$ correspondants sont montrés dans l'Exemple 4.

12.6. **Trouver un domaine fondamental pour $\tilde{\Gamma}(O)$.** Soient A_1, A_2, \dots, A_n des représentants des classes de $\tilde{\Gamma}(O)$ dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. On considère le triangle hyperbolique Δ avec les sommets $0, \rho$ et ∞ (cf. fig. 11). Alors le polygone

$$P = \bigcup_{i=1}^n A_i(\Delta)$$

avec des identifications de côtés est un domaine fondamental pour $\tilde{\Gamma}(O)$. Dans l'algorithme suivant p, q et r sont les côtés de Δ (cf. fig. 11), $U = TS$ et toutes les identifications renversent l'orientation.

Algorithme pour trouver un domaine fondamental de $\tilde{\Gamma}(O)$

```

function Domain ( Origami  $O$  )
  trouver  $R\tilde{E}P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  en utilisant  $PGamma(O)$ 

  // Main loop
  for  $1 \leq i, j \leq n$ 
    if  $A_i U A_j^{-1} \in \tilde{\Gamma}(O)$ 
      identifier  $A_i(q)$  avec  $A_j(r)$ 
    if  $A_i S A_j^{-1} \in \tilde{\Gamma}(O)$ 
      if  $i \neq j$ 
        identifier  $A_i(p)$  avec  $A_j(p)$ 
      else
        ajouter un sommet au milieu du côté  $A_i(p)$ 
        identifier les moitiés de  $A_i(p)$ 
    end for

  return  $\bigcup_{i=1}^n A_i(\Delta)$  avec les identifications déterminées

```

Exemple 6. Pour l'origami $L(2, 3)$ on obtient le domaine fondamental illustré sur la figure 10.

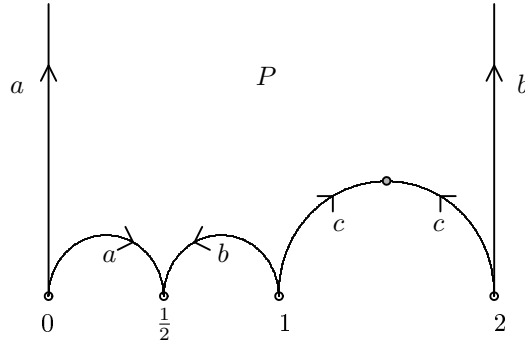


FIG. 10. *Domaine fondamental de $\tilde{\Gamma}(L(2, 3))$*

13. SYSTÈMES LIBRES DE GÉNÉRATEURS DE GROUPES DE VEECH

On va travailler sur le plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Le groupe modulaire $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \right\} / \langle -I \rangle$ agit sur ce plan par

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Le groupe modulaire augmenté $\text{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ des matrices 2×2 entières de déterminant 1 ou -1 modulo $\langle -I \rangle$ agit sur \mathbb{H} de la même manière pour les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1 et par

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{si } \det A = -1.$$

L'ensemble

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$$

est un domaine fondamental pour l'action de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$. C'est un triangle hyperbolique avec les sommets ρ , ρ^2 et ∞ , où $\rho = \exp(\frac{\pi i}{3})$.

Une moitié de ce triangle

$$\mathcal{D}^* = \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}$$

est un domaine fondamental pour $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$.

Définition 5. Les éléments de $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -orbites de i , ρ et ∞ on va appeler les *sommets pairs*, les *sommets impairs* et les *cusps* respectivement du pavage de \mathbb{H} par les $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -images de \mathcal{D}^* .

Les éléments de $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -orbites des segments hyperboliques $[i, \infty[$, $[\rho, \infty[$ et $[i, \rho]$ on appellera les *arêtes paires*, les *arêtes impaires* et les *f-arêtes*.

La ligne hyperbolique $]0, \infty[$ consiste en deux arêtes paires. Ses $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -images seront appelées les *lignes paires*. La ligne hyperbolique $]\frac{1}{2}, \infty[$ consiste en deux arêtes impaires et deux *f-arêtes*. Ses $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -images seront appelées les *lignes impaires*.

Lemme 2. Une ligne hyperbolique $]\frac{a}{b}, \frac{c}{d}[$, où $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont des nombres rationnels en forme réduite, est paire (resp. impaire) si et seulement si $|ad - bc| = 1$ (resp. 2).

Démonstration. Il est évident que l'expression $|ad - bc|$ est un invariant pour l'action de $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$. \square

On dira qu'un polygone hyperbolique dont deux sommets sont 0 et ∞ est *idéal* si tous ses côtés sont des lignes paires.

Les $\operatorname{PSL}^*(2, \mathbb{Z})$ -images du triangle avec les sommets 0, ρ et ∞ (cf. fig. 11) seront appelées les *triangles spéciaux*. Ainsi chaque triangle spécial a un côté pair p et deux côtés impairs q et r qui font l'angle $\frac{2\pi}{3}$.

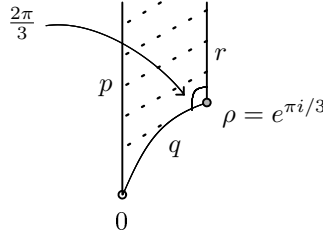


FIG. 11. *Triangle spécial*

Définition 6. Un *polygone spécial* P est un polygone hyperbolique convexe qui est une réunion d'un polygone idéal P_0 et d'un nombre fini de triangles spéciaux qui sont collés extérieurement à P_0 . Les côtés d'un polygone spécial ont des identifications suivantes :

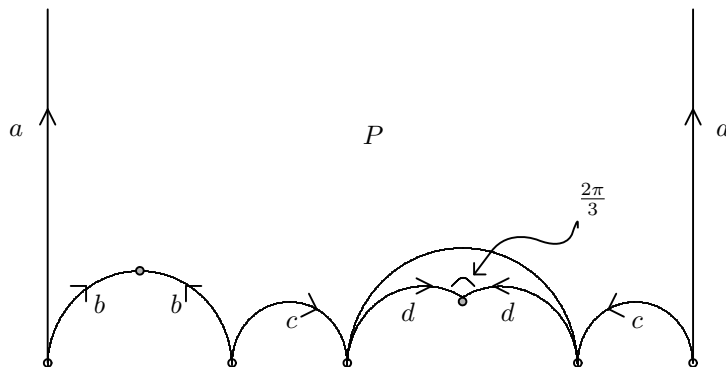
- I_0) toutes les identifications renversent l'orientation,
- I_1) chaque côté impair (c'est-à-dire qui est une arête impaire) est identifié avec le côté impair avec lequel il forme l'angle $\frac{2\pi}{3}$,
- I_2) pour chaque côté pair (qui est une ligne paire) on a l'une des deux possibilités : soit il est identifié avec un autre côté pair, soit les deux arêtes paires en lesquelles il consiste sont identifiées entre elles.

Un exemple d'un polygone spécial est illustré sur la figure 12.

Il est facile de montrer que si e et f sont deux côtés identifiés du polygone spécial P , alors il existe exactement une matrice de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ qui envoie e sur f en renversant l'orientation. Une telle matrice on appellera une *matrice d'identification* du polygone P . On notera Φ_P le sous-groupe de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ engendré par les matrices d'identification de P .

Le groupe modulaire est un produit libre de \mathbb{Z}_2 et \mathbb{Z}_3 , à savoir $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z}) \cong \langle S \rangle * \langle TS \rangle$. Il découle d'un théorème de Kurosh (cf. [Kur 67]) que tout sous-groupe Φ de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est un produit libre de copies de \mathbb{Z}_2 et \mathbb{Z}_3 . Si de plus Φ est d'indice fini, alors le nombre de multiplicateurs est aussi fini.

Définition 7. Soit Φ un sous-groupe d'indice fini de $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{Z})$. On dit qu'un système $\{x_i, i \in I\}$ de générateurs de Φ est *libre au sens de Rademacher* si Φ est un produit libre interne de ses sous-groupes cycliques $\langle x_i \rangle, i \in I$.

FIG. 12. *Polygone spécial*

Soit encore Φ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Il est connu qu'il existe un domaine fondamental pour Φ dont les matrices d'identification forment un système libre de générateurs de Φ . Un tel domaine on va appeler *admissible*.

Le résultat suivant est dû à Ravi S. Kulkarni (cf. [Kulk 91]).

Théorème 3 (Kulkarni). *Si P est un polygone spécial, alors P est un domaine fondamental admissible pour le groupe Φ_P .*

Inversement, tout sous-groupe Φ d'indice fini de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ admet un domaine fondamental admissible P qui est un polygone spécial, $\Phi = \Phi_P$.

Application : Soit O un origami. Le Programme donne un domaine fondamental D pour le groupe $\Gamma(O)$, ce domaine est pavé par des triangles spéciaux. Chaque polygone spécial peut être représenté comme réunion de triangles spéciaux, donc il est possible de réarranger le pavage de D pour obtenir un polygone spécial P . D'après le Théorème 3 les matrices d'identification de P engendrent le groupe $\Gamma(O)$ librement au sens de Rademacher.

Exemple 7. Dans l'Exemple 6 le domaine fondamental P du groupe $\tilde{\Gamma}(O)$, où $O = L(2, 3)$, est un polygone spécial et on obtient

$$\tilde{\Gamma}(O) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \right\rangle * \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

En particulier, puisque le Programme trouve trois générateurs (cf. l'Exemple 4), ils forment aussi un système libre de $\tilde{\Gamma}(O)$.

RÉFÉRENCES

- [ChMag 82] B. CHANDLER, W. MAGNUS – *The history of combinatorial group theory: a case study in the history of ideas*, Springer-Verlag, New York - Berlin, 1982.
- [Herrl 05] F. HERRLICH – *Characteristic Origamis*, Preprint, Karlsruhe, 2005.
- [HubLel 06] P. HUBERT, S. LELIÈVRE – *Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$* , Israel Journal of Mathematics **151** (2006), p. 281–321.
- [Kulk 91] R. S. KULKARNI – *An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group*, American Journal of Mathematics **113** (1991), p. 1053–1133.
- [Kur 67] A. KUROSH – *Théorie des groupes* (en russe), 3ème éd., « Nauka », Moscou, 1967.
- [LynSc 77] R. LYNDON, P. SCHUPP – *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
- [Niels 17] J. NIELSEN – *Die Isomorphismengruppe der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Math. Annal. **78** (1917), II. 2, p. 385–397.
- [Schm 04] G. SCHMITHÜSEN – *An algorithm for finding the Veech group of an origami*, Experimental Mathematics **13** (2004), no. 4, p. 459–472.
- [Schr 27] O. SCHREIER – *Die Untergruppen der freien Gruppen*, Hamburg. Abh. **5** (1927), p. 161–183.